УДК 517.53

Нахождение интегралов с помощью вычетов

Зиновьев Б.С., Королева М.П., кандидаты физ.-мат. наук, Воронова А.С., ст. преп.

Найдены некоторые несобственные интегралы единым методом теории вычетов комплексного анализа.

Ключевые слова: интеграл, вычеты, полюс.

Finding integrals by means of residues

Zinov'yev B.S., Koroleva M.P., cand. phys.-math. sci., Voronova A.S.

Several improper integrals are found by means of some method of the theory of residues in complex analysis.

Keywords: integral, residue, pole.

Для нахождения интегралов нам потребуется известная теорема.

Теорема ([1]). Пусть $f(z)$ – аналитическая функция комплексного переменного z в верхней полуплоскости ($y \geq 0$), кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $Imz_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Бесконечно удаленная точка является нулем порядка не ниже второго. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} resf(z_k),$$

где $resf(z_k) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_k}\left(\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-z_k)^m f(z)\right)$

для полюса z_k функции $f(z)$ порядка m.

Выпишем основные найденные интегралы ($a > 0$, $b > 0$):

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi}{2\left(b^2-a^2\right)}\left(be^{-mb}-ae^{-ma}\right),\ a \neq b; \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^2\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi}{2\left(b^2-a^2\right)^2}\times \left(-be^{-mb}+\frac{e^{-ma}}{2a}\left(\left(b^2-a^2\right)(1-am)+2a^2\right)\right),\ a \neq b; \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^2\left(b^2+x^2\right)^2} = \frac{\pi}{4\left(b^2-a^2\right)^3}\times \left(\frac{e^{-ma}}{a}\left(\left(b^2-a^2\right)(1-am)+4a^2\right)- \frac{e^{-mb}}{b}\left(\left(a^2-b^2\right)(1-bm)+4b^2\right)\right),\ a \neq b; \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^4+x^4\right)\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi}{2\left(b^4+a^4\right)}\times \left(-be^{-mb}+\frac{e^{\frac{-ma}{\sqrt{2}}}}{a\sqrt{2}}\left(\cos\frac{am}{\sqrt{2}}\left(b^2+a^2\right)-\sin\frac{am}{\sqrt{2}}\left(b^2-a^2\right)\right)\right); \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{\pi}{4a}(1-am)e^{-ma}. \quad (5)$$ [1]

Рассмотрим некоторые частные случаи этих интегралов.

Если в формуле (2) $m = 0$, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a^2+x^2\right)^2\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi}{4a(a+b)^2}. \quad (6)$$

Если $a = b$, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a^2+x^2\right)^3} = \frac{\pi}{16a^3}. \quad (7)$$ [2]

Если в формуле (3) $m = 0$, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a^2+x^2\right)^2\left(b^2+x^2\right)^2} = \frac{\pi}{4ab(a+b)^3}. \quad (8)$$

Если $a = b$, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a^2+x^2\right)^4} = \frac{\pi}{32a^5}. \quad (9)$$ [2]

Если в формуле (4) $m = 0$, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a^4+x^4\right)\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi\left(a^2+b^2-ab\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}a\left(b^4+a^4\right)}. \quad (10)$$

Если $a = b$, то

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(a^4+x^4\right)\left(a^2+x^2\right)} = \frac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}a^4}. \qquad (11)$$

Если в формуле (5) $m = 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{\pi}{4a}.^2 \qquad (12)$$

Приведем краткие доказательства формул (1)–(5) и соответствующие ссылки.

Формула (1) приведена в справочнике [4, с. 424] и основана на следующих формулах:

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos mx\,dx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{imx} dx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)} =$$

$$= \pi \operatorname{Re} i\left(resf\left(ai\right) + resf\left(bi\right)\right),$$

$$resf\left(ai\right) = \frac{-ae^{-ma}}{2i\left(b^2-a^2\right)},$$

$$resf\left(bi\right) = \frac{-be^{-mb}}{2i\left(a^2-b^2\right)},$$

где

$$f(z) = \frac{z^2 e^{imz}}{\left(a^2+z^2\right)\left(b^2+z^2\right)}.$$

Во втором интеграле

$$f(z) = \frac{z^2 e^{imz}}{\left(a^2+z^2\right)^2\left(b^2+z^2\right)}.$$

Точка $z_1 = bi$ – полюс первого порядка, точка $z_2 = ai$ – полюс второго порядка. Поэтому

$$resf\left(bi\right) = \frac{-be^{-mb}}{2i\left(b^2-a^2\right)^2},$$

$$resf\left(ai\right) = \frac{e^{-ma}\left(\left(b^2-a^2\right)\left(1-am\right)+2a^2\right)}{4ia\left(b^2-a^2\right)^2}.$$

В третьем интеграле

$$f(z) = \frac{z^2 e^{imz}}{\left(a^2+z^2\right)^2\left(b^2+z^2\right)^2}.$$

Точки ai и bi являются полюсами второго порядка. Поэтому

$$resf\left(ai\right) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\frac{z^2 e^{imz}}{\left(z+ai\right)^2\left(b^2+z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{-ma}}{4ai\left(b^2-a^2\right)^3}\left(\left(b^2-a^2\right)\left(1-am\right)+4a^2\right).$$

В точке bi вычет аналогичен с заменой a на b.

В четвертом интеграле

$$f(z) = \frac{z^2 e^{imz}}{\left(a^4+z^4\right)\left(b^2+z^2\right)}.$$

Точки bi, $ae^{i\frac{\pi}{4}}$, $ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ являются полюсами первого порядка. Поэтому

$$resf\left(bi\right) = \frac{-be^{-mb}}{2i\left(a^4+b^4\right)},$$

$$resf\left(ae^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{e^{i\frac{ma}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-ma}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}a\left(1+i\right)\left(b^2+ia^2\right)},$$

$$resf\left(ae^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{e^{-i\frac{ma}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-ma}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}a\left(-1+i\right)\left(b^2-ia^2\right)}.$$

Складывая вычеты и умножая на πi, получаем интеграл (4).

Отметим, что формулы (7), (9), (12) имеются в [4, с. 309] в другой форме. Формула 5 имеется в [2].

Список литературы

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. – М.: Физ.-мат.,1976.

2. Двайт Г.Б. Таблица интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964.

3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физ.-мат., 1962.

Зиновьев Борис Сергеевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.

Королева Марина Павловна,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.

Воронова Алла Степановна,
Ивановский государственный энергетический университет,
старший преподаватель кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.